vi) $(A^{-1})^{-1} = A$ si A inversible

vii) $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$ si A inversible

(Preuve) $\boxed{\text{prouver (v)}}$

$(AB)^{-1} \overset{\text{aff.}}{=} B^{-1} . A^{-1}$??

$I_n . C = C . I_n = C \;, \forall C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

Oui, car

$(AB) . (B^{-1} . A^{-1}) = A \underbrace{B . B^{-1}}_{I_n} A^{-1} = A . I_n . A^{-1}$

$= A . A^{-1} = I_n$

$(B^{-1} A^{-1}) . (AB) = B^{-1} \underbrace{A^{-1} A}_{I_n} B = B^{-1} . I_n B$

$= B^{-1} . B = I_n$

□

Dans cette séance on va voir

- le lien entre composition d'app. lin et produit de matrices
  $\longrightarrow$ applications
- le lien entre app. lin. bij et matrices inversibles
- critère d'inversibilité $\longrightarrow$ matrices 2×2
  $\hookrightarrow$ en général $\leftarrow$ Algorithme de Gauss
- notion de matrices élémentaires $\longleftarrow$ lien avec matrices inversibles

On a vu la dernière fois que

$$(*) \quad [S \circ T] = [S] \cdot [T]$$

pour $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $S : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ app. lin.

On rappelle que la matrice canonique d'une app. lin : $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$(\mathrm{id})\ T(\bar{x}) = \underbrace{[T]}_{\in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})} \cdot \bar{x}$$

pour app. lin qcq. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ qcq.

Exercice Montrer (α) à partir de (id).

$\longrightarrow$ (id) à T : $T(\bar{x}) = [T] \cdot \bar{x}$, pour $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

(id) à S : $S(\bar{y}) = [S] \cdot \bar{y}$, pour $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$

$$\Longrightarrow (S \circ T)(\bar{x}) \overset{\text{déf}}{:=} S(\underbrace{T(\bar{x})}_{\bar{y}}) = [S] \cdot \underbrace{T(\bar{x})}_{\bar{y}}$$

$$= [S] \cdot ([T] \cdot \bar{x}) = ([S] \cdot [T]) \cdot \bar{x}$$

(id) à $S \circ T$: $(S \circ T)(\bar{x}) = [S \circ T] \cdot \bar{x}$, pour $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

Alors $[S \circ T] \cdot \bar{x} = (S \circ T)(\bar{x}) = [S] \cdot [T] \cdot \bar{x}$

pour tout $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

Par unicité de matrice canonique $[S \circ T] = [S] \cdot [T]$

↳ Si $T(\bar{x}) = A \cdot \bar{x}$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ alors $A = [T]$.

Rappel: ☺ (Thm 3.22)

Conséquence

Lemme 5.15 Ed. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ app. lin.

T bijective $\iff [T]$ inversible

$\iff$ la FER de $[T]$ est I_n

Inversion de matrices 2×2

THM. 5.20 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

Alors A est inversible ssi $\underbrace{ad - bc}_{\det(A) :=} \neq 0$

déterminant de A

En plus, si $\det(A) \neq 0$, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Exemple 5.21 Calculer les solutions du

SEL $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = b_1 \\ 3x_1 + 4x_2 = b_2 \end{cases}$ avec $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ q.c.q. → quelconque

$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ← forme vectorielle du SEL

$$\boxed{A \cdot \bar{x} = \bar{b}}$$

Ind: Utiliser l'inverse de A !

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I_2} \cdot \bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\bar{x} = A^{-1}\bar{b}}$$

i.e.
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b_1 + b_2 \\ 3/2\, b_1 - 1/2\, b_2 \end{pmatrix}$$

Déf 5.23 Une matrice carrée est dite élémentaire si elle s'obtient de I_n à partir de faire une OEL.

$\boxed{\text{Exemple } 5.24^*}$ • $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est élémentaire

$\boxed{\text{RK. FONDA}}$ Soit E est la matrice élémentaire qui correspond à l'OEL ξ de taille m.
Alors

$$A \xrightarrow{\xi} \underbrace{E \cdot A}_{\text{matrice obtenue}}$$

pour toute matrice $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$

de A en faisant
l'OEL $\mathcal{E}$.

Comme conséquence

Lemme 5.26 Toute matrice élémentaire est inversible.

THM 5.27 * Une matrice inversible ssi elle est un produit de matrices élémentaires!

Algorithme de Gauss (Jordan):

Soit $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

On considère

1) $[A \,\vdots\, I_n] \in \mathbb{M}_{n\times(2n)}(\mathbb{R})$

et on calcule la FER de $[A \,\vdots\, I_n]$:

$$[A \,\vdots\, I_n] \underbrace{\longrightarrow \dots \longrightarrow}_{\text{OEL}} \underbrace{[\tilde{A} \,\vdots\, C]}_{\text{FER de } [A \,\vdots\, I_n]}$$

2) • Si $\tilde{A} = I_n$, alors A est inversible et $C = A^{-1}$

• Si $\tilde{A} \neq I_n$, alors A n'est pas inversible.

$\boxed{\text{Exemple 5.30}}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$

Déterminer si A est inversible.

[Calculer A^{-1} si elle existe.

$$[A \,\vdots\, I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$